ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΙΟΣ -ΙΟΥΝΙΟΣ 2025

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ:

1. **ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α1. Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι τυχαία σημεία επιπέδου, να αποδείξετε ότι για τις συντεταγμένες (x,y) του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ισχύει

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ και } y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Απόδειξη:

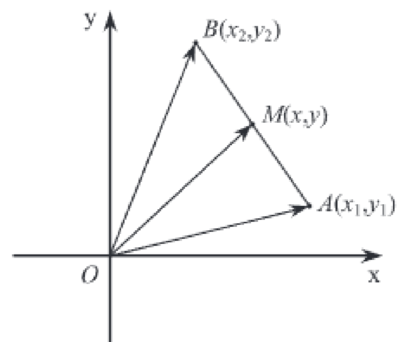
Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x,y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB.

Επειδή $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, και

$\overrightarrow{OM}=(x,y)$, $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$,

έχουμε

$$(x,y)=\frac{1}{2}[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



Επομένως ισχύει

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad \text{και} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

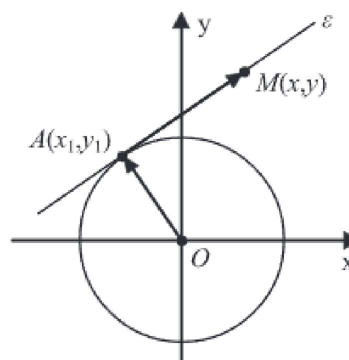
ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου c: $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο Α(x_1, y_1) είναι η ευθεία ε: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Απόδειξη:

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $OA \perp AM$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0. \qquad (1)$$



Όμως $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$. Έτσι η (1) γράφεται διαδοχικά

$$x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0$$

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2, \qquad \text{αφού} \qquad x_1^2 + y_1^2 = \rho^2.$$

Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boxed{xx_1 + yy_1 = \rho^2}$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 *και* λ_2 αντίστοιχα να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Απόδειξη:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1y_2 = -x_1x_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$$

2. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ << ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ >>

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(1) Η απόσταση του σημείου Μ(x_0, y_0) από την ευθεία (ε) με εξίσωση Αx+Βy+Γ=0 δίνεται από τον τύπο $d(M,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (Σ)

(2) Η ευθεία $y = 2025$ είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ. (Σ)

(3) Αν $\overrightarrow{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$, τότε $\lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$. (Λ)

(4) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$, τότε κατ΄ ανάγκη είναι: $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. (Λ)

(5) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α (x_0, y_0) είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda (x - x_0)$ με $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ (Λ)

(6) Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$. (Σ)

(7) Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής. (Σ)

(8) Κάθε ευθεία της μορφής $y = \lambda x$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Σ)

(9) Η εξίσωση της καμπύλης $x^2 + y^2 = 9$ παριστάνει κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 9. (Λ)

(10) Τα ομόρροπα διανύσματα είναι πάντα συγγραμικά. (Σ)

3. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1,2)$, $B(3,-2)$ και $\Gamma(1,4)$.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του τριγώνου ΑΜ.

γ. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ.

ΛΥΣΗ

α. $\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{X_\Gamma - X_B} = \frac{4-(-2)}{1-3} = \frac{6}{-2} = -3$

Η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι :

$y - y_\Gamma = \lambda_{B\Gamma}(x - x_\Gamma) \Leftrightarrow y - 4 = -3(x-1)$

β. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ

είναι : $x_M = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ και $y_M = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Άρα Μ(2 , 1).

Η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ είναι :

$$y - y_A = \frac{y_M - y_A}{X_M - X_A}(x - x_A)$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{1-2}{2+1}(x+1)$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = -\tfrac{1}{3}(x+1) \Leftrightarrow y = -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3}.$$

γ. Αν (η) η ζητούμενη μεσοκάθετος τότε

$\lambda_\eta \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot (-3) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta = \frac{1}{3}$

Επομένως (η): $y - y_M = \lambda_\eta(x - X_M) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x-2)$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η ευθεία (ε) : y+x + 3=0

Α)Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x.

Β) Να βρεθεί η ευθεία που είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Α(-2,1)

Γ) Να βρείτε την ευθεία που είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο που η (ε) τέμνει τον άξονα των x΄x.

ΛΥΣΗ

Α. Η δοσμένη ευθεία γίνεται $y = -x - 3$ οπότε

$$\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\varphi \Leftrightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Β. Η ζητούμενη κάθετη ευθεία (η) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta = 1$ οπότε (η): $y - y_A = \lambda_\eta(x - x_A)$

$$\Leftrightarrow y - 1 = x + 2 \Leftrightarrow y = x + 3$$

Γ. Το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα x΄x προκύπτει για y=0 στην (ε). Τότε είναι $x = -3$. $Άρα\ Δ(-3\ ,0)$. Επίσης η ζητούμενη ευθεία (κ) θα έχει $\lambda_\kappa = \lambda_{\varepsilon=} = -1$

Τελικά (κ): $y - y_Δ = \lambda_\kappa(x - x_Δ) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x+3)$

$$\Leftrightarrow y = -x - 3$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3</u>

Δίνεται η εξίσωση $(x - y + 1) + \lambda(2x + y + 3) = 0$, λ∊R. **(1)**

Να αποδείξετε ότι :

Α. Για κάθε λ∊R η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

Β. Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΛΥΣΗ

Α. Η δοσμένη εξίσωση γίνεται :

$$x - y + 1 + 2\lambda x + \lambda y + 3\lambda = 0$$

$\Leftrightarrow (1 + 2\lambda)x + (\lambda - 1)y + 3\lambda + 1 = 0.$

Για να παριστάνει η (1) ευθεία θα πρέπει το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases} 1 + 2\lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \end{cases}$ να είναι αδύνατο .

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Άρα Σύστημα Αδύνατο επομένως ορίζεται ευθεία για κάθε λ∊R.

Β.

- Για $\lambda = 0$ προκύπτει η ευθεία $(\varepsilon_1) : x - y + 1 = 0$
- Για $\lambda = 1$ προκύπτει η ευθεία $(\varepsilon_2) : x - y + 1 + 2x + y + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon_2) : 3x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon_2) : x = -\frac{4}{3}$$

Λύνουμε το Σύστημα των $(\varepsilon_1)\ \kappa\alpha\iota\ (\varepsilon_2)$ και προκύπτει το σημείο

$$A(-\frac{4}{3}\ ,-\frac{1}{3}).$$

Για να δείξουμε ότι όλες οι ευθείες της μορφής **(1)** διέρχονται από το σημείο Α αρκεί οι συντεταγμένες αυτού να επαληθεύουν την **(1).**

Είναι : $\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+1\right)+\lambda\left[2\left(-\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{3}+3\right]=0 \Leftrightarrow 0=0$

Άρα όλες οι ευθείες της μορφής **(1)** διέρχονται από το Α.